

# Modelo de plasticidad multiaxial para arcillas sometidas a carga dinámica

Francisco Javier Montáns Leal

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales  
Universidad de Castilla La Mancha  
13071 Ciudad Real, España  
Tel.: 926-29 53 00/3806, Fax: 926-29 53 61  
e-mail: fmontans@ind-cr.uclm.es

Ronaldo I. Borja

Department of Civil Engineering-Terman Engineering Center  
Stanford University  
Stanford, California 94305, E.U.A.  
Tel.: 1-650-723 36 64, Fax: 1-650-723 75 14  
e-mail: borja@cive.stanford.edu

## Resumen

En este artículo se desarrolla un modelo de plasticidad de superficie límite para suelos cohesivos sin drenaje dotado de un algoritmo capaz de manejar tanto carga dinámica multiaxial como la ausencia de rango elástico. Dicho algoritmo puede ser implementado en cualquier programa de elementos finitos. En el desarrollo de la formulación continua se siguen los mismos pasos que en la plasticidad clásica. Modelos monodimensionales tradicionales como el exponencial, hiperbólico, de Davidenkov o el de Ramberg-Osgood pueden ser proyectados en el dominio de tensiones desviadoras y extendidos sistemáticamente a las tres dimensiones espaciales. En particular, el modelo exponencial se ha relevado apropiado para suelos cohesivos y ha sido utilizado en este trabajo. Los parámetros internos del mismo se obtienen directamente de las curvas típicas de reducción del módulo a cortante, de perfiles de velocidades de ondas a cortante y/o de ensayos de penetración. Para analizar el comportamiento del modelo, se le expone tanto a cargas monoaxiales como a multiaxiales y tanto a cargas cuasiestáticas como a sísmicas. Además, el modelo desarrollado es especialmente útil en interacción suelo-estructura tridimensional e incluso requiere menos parámetros que modelos lineales monodimensionales equivalentes, usados habitualmente en ingeniería geotécnica.

## PLASTICITY MODEL FOR CLAYS UNDER MULTIAXIAL NONPROPORTIONAL LOADING

## Summary

An associative bounding surface plasticity model for undrained clays and an algorithm capable of handling both multiaxial dynamic loading and the absence of elastic range is developed. The algorithm is suitable of being implemented in any finite elements code. When developing the continuum theory, the classical plasticity steps are followed. Traditional monodimensional models such as the hyperbolic, exponential, Davidenkov and Ramberg-Osgood can be mapped in the deviatoric domain, casted in the overall layout and extended to the 3D reality in a systematic way. Specifically, the exponential model has been shown appropriate for cohesive soils and therefore it is used in this study. The internal parameters of the mapping of the exponential model are easily obtained from the traditional shear moduli reduction curves, shear wave velocity profiles and/or SPT blowcounts. The behavior of the model is investigated in both monotonic and dynamic loading, and in both monodimensional and in three-dimensional loading. The model is specially useful in 3D soil-structure interaction and requires less parameters than the equivalent linear models commonly used in geotechnical earthquake engineering.

**Palabras clave:**

*Plasticidad, ingeniería sísmica y geotécnica, comportamiento de suelos.*

**INTRODUCCIÓN**

El comportamiento de suelos es altamente no-lineal incluso para pequeñas solicitaciones<sup>1</sup>. Esta no-linealidad ha sido tradicionalmente abordada de diferentes formas. La forma más conocida y más usada es llevar a cabo los análisis mediante métodos lineales equivalentes que prorratean de algún modo las propiedades del suelo sometido a diferentes niveles de deformación a partir de curvas experimentales<sup>2</sup>. En ingeniería sísmica, donde el suelo puede analizarse como no drenado, el programa SHAKE<sup>3,4</sup> es el abanderado del método, extendido a tres dimensiones en programas tales como HASSI o FLUSH<sup>5,6</sup>. Otro método de analizar tales comportamientos es a través de modelos no-lineales monodimensionales que aceptan comportamiento cíclico. Entre este tipo de modelos están los de Martin-Davidenkov, Harding-Drnevich-Cundall-Pyke (HDCP), exponencial o hiperbólico, Ramberg-Osgood, etc., implementados en diferentes programas<sup>7,8,9,10</sup>. Ambos métodos por experiencia proporcionan habitualmente soluciones ingenierilmente aceptables para gran parte de problemas<sup>4</sup>, pero carecen de la posibilidad de análisis no-lineal multiaxial acoplado donde las propiedades del suelo dependen de la deformación en cada instante y de su historia reciente. Este tipo de análisis es importante en ingeniería sísmica y en el estudio de transmisión de vibraciones en zapatas. En particular, el primer método implica el uso durante todo el análisis de ciertas propiedades constantes prorrateadas a partir de máximas deformaciones esperables a través de un proceso iterativo. Realmente las propiedades son variables en cada instante y tal prorrateo implica establecer el porcentaje equivalente entre deformación máxima y “efectiva”, además de la presunción de que tal deformación proporcionará valores adecuados a ser utilizados durante todo el análisis. El segundo método implica que existe total independencia de las propiedades del suelo en diferentes direcciones; esto es, que la deformación en una dirección no afecta a las otras direcciones.

Finalmente, la tercera opción es el uso de modelos de plasticidad multiaxiales, normalmente tomados de la plasticidad de metales. Tales modelos son por ejemplo modelos de Von Mises<sup>1,11</sup>, modelos de superficies múltiples<sup>12,13,14</sup> o modelos basados en la idea de superficie límite<sup>15,16</sup>. Los modelos de plasticidad simples como el de Von Mises no son capaces de predecir el comportamiento del suelo por su simplicidad. Los modelos basados en superficies múltiples requirieron gran capacidad de almacenamiento debido a la cantidad de superficies a utilizar si se quiere representar adecuadamente el comportamiento, así como muchas comprobaciones<sup>17,18</sup> debido a la necesidad de seguir la posición de las diferentes superficies. Además carecen del efecto Masing<sup>19</sup> observado en los suelos. Por contra, los modelos basados en la idea de superficie límite requieren únicamente dos superficies y pueden representar adecuadamente el efecto Masing. Desafortunadamente requieren parámetros internos difíciles de obtener y/o no han sido satisfactoriamente probados en análisis sísmicos tridimensionales y/o requieren demasiadas variables históricas o no permiten la falta de rango elástico<sup>20,21,22</sup>. Las condiciones de carga sísmica triaxial y deformaciones plásticas desde el primer instante de carga son especialmente complicadas de manejar, por lo que el algoritmo ha de ser robusto.

El procedimiento aquí desarrollado está basado en la idea de proyectar los modelos monodimensionales de suelos en el espacio de tensiones desviatorias admisible<sup>21,23</sup> extendiéndolos al espacio multiaxial de tensiones desviatorias. La idea central es el uso de una superficie de contorno que limita la parte admisible de dicho espacio y el uso de un parámetro auxiliar para proyectar en él los modelos a través de la función de endurecimiento. Así se adquiere no únicamente la ventaja de usar modelos ampliamente conocidos

por la comunidad geotécnica, sino también la posibilidad de análisis no-lineales multiaxiales acoplados.

Borja y Amies<sup>21</sup> desarrollaron su modelo tridimensional bajo la hipótesis de una región elástica permanentemente nula o puntual<sup>15</sup> y llevaron a cabo la formulación acorde con dicha hipótesis. En este trabajo se desarrollará un modelo con una superficie de fluencia consistente con la proyección de función de endurecimiento. La región elástica se desvanecerá únicamente cuando ocurra una descarga para recuperar las propiedades iniciales. Se mostrará además que en la formulación continua, la condición de descarga implicada por un incremento del módulo de endurecimiento es exactamente equivalente a la que se deriva de la superficie de fluencia, pero esto no es cierto en la formulación discreta. El modelo se diferencia numéricamente del desarrollado por Borja y Amies<sup>21</sup> fundamentalmente en la regla de fluencia y en la estabilidad ante carga dinámica. Como pago por la mejora, en lugar de resolver una ecuación no-lineal escalar, se tendrá que resolver una tensorial.

## TEORÍA

Siguiendo la idea de Borja y Amies<sup>13</sup>, consideramos un dominio admisible en el hiperespacio de tensiones desviatorias limitado por la denominada superficie límite o frontera (*bounding surface*). Por conveniencia, dado que el modelo es de carácter desviador, se denominará  $\sigma'$  al tensor de tensiones completo  $\mathbf{I}$  al tensor identidad de cuarto orden,  $\mathbf{1}$  al de segundo orden,  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$  al tensor de proyección en el hiperplano desviador y  $\sigma = \mathbf{P} : \sigma'$  al tensor desviador de tensiones. La operación  $\otimes$  es el producto diádico de tensores de segundo orden en tensores de cuarto orden y los dos puntos : denotan bien el producto escalar de dos tensores de segundo orden, o bien el producto de uno de cuarto orden y uno de segundo en otro de segundo (aplicación tensorial).

Puesto que consideraremos que el material es inicialmente isótropo (sólo la historia reciente es considerada), la superficie límite tiene que ser (al menos inicialmente) una hipersfera en dicho espacio (un hipercilindro en el hiperespacio completo de tensiones) y centrada en el origen o estado tensional hidrostático. La proyección de dicha superficie en el plano desviador de tensiones principales (comúnmente denominado plano  $\pi$ ) es una circunferencia inicialmente centrada en el origen desviador. Durante el proceso de carga y descarga se trabajará bajo la hipótesis de que la superficie mantiene su forma por razones obvias de sencillez. No obstante, durante el desarrollo de la formulación, se le permitirá el traslado para poder así representar endurecimientos puramente cinemáticos<sup>23</sup>.

Se adoptará también la hipótesis de que el material recupera las propiedades elásticas cuando se produce una descarga. En el límite de tensiones admisibles (superficie límite) el material presenta endurecimiento puramente cinemático o nulo. En el primer caso la superficie límite se traslada y el valor del endurecimiento sería el ínfimo de la función de endurecimiento. En el segundo la superficie estaría fija. La Figura 1 muestra un esquema de como sería la función de endurecimiento en el plano  $\pi$ . En dicha figura se representan el tensor de tensiones  $\sigma_0$  y el punto que representa el tensor de tensiones  $\sigma_0$  cuando se produjo la última descarga. Se define el tensor imagen en la superficie límite a

$$\hat{\sigma} = \sigma + k(\sigma - \sigma_0) \quad (1)$$

donde  $k$  es un parámetro tal que  $\hat{\sigma}$  reside en la superficie límite. Este parámetro permite la proyección de la función de endurecimiento en el dominio de tensiones.

Borja y Amies mostraron cómo diversos modelos de comportamiento monodimensionales tales como la función exponencial, la hiperbólica o el modelo de Davidenkov, entre otros, pueden ser expresados en función del parámetro  $k$ . Por ejemplo, escogiendo una función de endurecimiento de la forma  $\dot{\sigma}_a = H' \dot{\varepsilon}_a$ , donde  $\sigma_a = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma\|$  y  $\varepsilon_a = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\varepsilon\|$  son las tensiones

**Figura 1.** Proyección del módulo de endurecimiento en el plano  $\pi$  de tensiones principales

uniaxiales desviadoras en incompresibilidad, la función exponencial puede ser expresada de la forma

$$H' = h' k^m \quad (2)$$

donde  $h'$  y  $m$  son constantes dependientes del material y que serán determinadas más adelante. Como ejemplo de una función exponencial con un ínfimo no nulo

$$H' = h' k^m + \hat{H}'(k) \quad (3)$$

donde  $\hat{H}'$  puede ser una función cualquiera (por ejemplo  $\hat{H}'(k) = H'_0$ , una función de endurecimiento constante) que representa el endurecimiento cinemático cuando las tensiones alcanzan la superficie límite.

La función de endurecimiento dentro de la superficie límite (dominio admisible) es únicamente función del parámetro  $k$ , por lo que los contornos de endurecimiento constante son a su vez contornos de  $k$  constante. La forma de dichos contornos puede ser directamente obtenida del hecho de que por definición imagen reside en la superficie límite

$$(\hat{\sigma} - \beta): (\hat{\sigma} - \beta) = R^2 \quad (4)$$

donde  $\beta$  es el centro de dicha superficie y  $R$  es su radio. De la definición de  $\hat{\sigma}$  ecuación (1)

$$[\sigma + k(\sigma - \sigma_0) - \beta]: [\sigma + k(\sigma - \sigma_0) - \beta] = R^2 \quad (5)$$

Definiendo el parámetro  $p := 1/(1+k)$  e insertándolo en la ecuación previa escalada por  $p^2$

$$[\sigma - \sigma_0 + p(\beta - \sigma_0)]: [\sigma - \sigma_0 + p(\beta - \sigma_0)] = (pR)^2 \quad (6)$$

Por lo tanto, las superficies de endurecimiento constante dentro de la superficie límite son circunferencias de radio

$$r := pR \quad (7)$$

y centro

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma}_0 + p(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\sigma}_0) \quad (8)$$

Mientras  $\boldsymbol{\sigma}$  se “aleja” de  $\boldsymbol{\sigma}_0$  (tensor de tensiones en la última descarga), el centro del contorno de  $k(\boldsymbol{\sigma})$  constante se mueve hacia  $\boldsymbol{\beta}$  y el radio se incrementa hacia  $R$ . Nótese que  $k \in (0, \infty)$ ,  $p \in [0, 1]$ ;  $r \in [0, R]$ . El parámetro  $p$  es el radio normalizado  $r/R$  de dicho contorno (Figura 2).

**Figura 2.** Geometría del modelo

Basándonos en este esquema, se puede argumentar la forma de la superficie límite de diferentes formas. Supóngase que la superficie límite fuese una superficie extraña que pasase por  $\boldsymbol{\sigma}$  en el dominio de tensiones admisible. Cualquiera que fuese su forma, cruzaría contornos de endurecimiento constante, a menos que coincidiese con ellos. El hecho experimental de que el endurecimiento decrece únicamente con deformaciones plásticas fuerza la elección del contorno de constante  $k(\boldsymbol{\sigma})$  como superficie de fluencia. Si se hubiese escogido un punto como dicha superficie, se podría producir cuanta deformación plástica se deseara sin reducir el módulo de endurecimiento, simplemente evolucionado sobre los contornos de  $k$  constante. La superficie de fluencia no puede ser, por lo tanto y acorde con la experiencia, un punto. Otra forma de razonarlo es a partir del concepto de superficie de fluencia: la fluencia es el conjunto de estados admisibles de tensiones a los que se puede evolucionar a través de carga neutra (sin plastificación ni descarga). Puesto que carga neutra implica que el endurecimiento ha de permanecer invariable, los contornos de  $k$  constante y la superficie de fluencia coinciden.

Cuando el material descarga, se pretende que éste recupere las propiedades elásticas, tal y como se obtiene experimentalmente. Entonces, el módulo de endurecimiento vuelve a ser infinito, y como éste es función monótona de  $k$ , implica de que  $k$  debe ser infinito. Esto únicamente ocurre cuando  $\boldsymbol{\sigma}_0$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  coinciden. Puesto que experimentalmente no se han observado cambios bruscos en el tensor de tensiones cuando el material descarga, sino más bien una evolución continua, forzosamente se ha de obligar  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}$  en el instante en que la descarga ocurre. En dicho instante, la superficie de fluencia se convierte en un punto y tanto  $k$  como  $H'$  retoman el “valor” infinito. Posteriormente, el material evoluciona en el proceso de carga y se endurece tanto cinemática como isotrópicamente de una forma combinada implicada por el modelo y la función de endurecimiento.

Con este marco se desarrollan a continuación las formulaciones continua y discreta.

### Formulación continua

La formulación general del modelo sigue los pasos usuales de la plasticidad clásica con retorno radial<sup>24</sup> para pequeñas deformaciones. Las “velocidades” de deformación son divididas en una parte elástica y una plástica

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (9)$$

Denotando por  $f := (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - r^2$  a la función de fluencia y por  $\gamma$  al parámetro de consistencia

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \gamma \frac{(\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma})}{\|\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}\|} \\ &= \gamma \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (10)$$

es la regla asociativa y  $\hat{\mathbf{n}} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) / \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}\|$  es la normal a la superficie límite en  $\boldsymbol{\sigma}$ .

El parámetro de consistencia es obtenido de la condición de consistencia  $\dot{f} = 0$  como es habitual

$$\dot{f} = 2(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) : (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}) - 2r\dot{r} = 0 \quad (11)$$

y las derivadas “temporales”  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  $\dot{r}$  y  $\dot{p}$  de sus propias definiciones

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{p}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\sigma}_0) + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 + p(\dot{\boldsymbol{\beta}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0) \quad (12)$$

$$\dot{r} = \dot{p}R \quad (13)$$

$$\dot{p} = -p^2 \dot{k} \quad (14)$$

La derivada del tensor de tensiones es obtenida de la ecuación constitutiva de la parte elástica. Denominando  $\mathbf{C}$  al tensor elástico de cuarto orden

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (15)$$

El parámetro  $\dot{k}$  se obtiene de su equivalente plástica de la forma siguiente

$$\dot{k} = \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma \left| \frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right| \hat{\mathbf{n}} : \mathbf{H} : \hat{\mathbf{n}} \\ &= sH\gamma \end{aligned} \quad (17)$$

donde se ha denotado al tensor de endurecimiento por  $\mathbf{H} := [\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}} / \partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] = H\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}$ , redefiniendo  $H := \frac{2}{3}H'$  por conveniencia y utilizando el hecho de que

$$\frac{\partial k / \partial \boldsymbol{\sigma}}{\|\partial k / \partial \boldsymbol{\sigma}\|} = \hat{\mathbf{n}}$$

como se muestra en el apéndice y puede ser deducido fácilmente de la naturaleza del modelo.

Por lo tanto, de dicha ecuación se observa como  $H'$  retiene de forma natural  $\dot{k}$ , que está a su vez relacionado con la velocidad de deformación plástica a través de la cantidad redefinida como  $s := \|\partial k / \partial \boldsymbol{\sigma}\|$ . Esta cantidad realiza la proyección de  $H'$  en el dominio de tensiones. La expresión del tensor  $\partial k / \partial \boldsymbol{\sigma}$  está calculada en el apéndice.

La única cantidad en la ecuación de consistencia que permanece desconocida es la derivada del centro de la superficie límite en el caso de que a ésta se le permita trasladarse. El movimiento de dicha superficie puede ser calculado del hecho de que cuando el tensor de tensiones resida en ella para el límite  $k \rightarrow 0$  ( $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  en la dicha superficie), la única velocidad de deformación será aquella procedente del movimiento de la superficie límite en  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , cabe decir

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \hat{H} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (18)$$

Se ha utilizado el hecho de que los contornos de  $k$  constante no se pueden cruzar, y por lo tanto  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0$ .

Sustituyendo todas estas ecuaciones en la de consistencia y tras algunas operaciones algebraicas, se obtiene el parámetro de consistencia

$$\gamma = \frac{\hat{\mathbf{n}} : \mathbf{C}}{\hat{\mathbf{n}} : \mathbf{C} : \hat{\mathbf{n}} + \hat{H} - p^2 s H [R - \hat{\mathbf{n}} : (\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\beta})]} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (19)$$

El tensor elastoplástico tangente se obtiene inmediatamente sustituyendo este valor en la ecuación constitutiva de la parte elástica.

### Algoritmo numérico

Especialmente importante en el modelo son las capacidades de manejo de la ausencia de rango elástico y de cargas dinámicas aleatorias (sísmicas) multiaxiales. Lo primero puede producir errores de redondeo significativos que afectan seriamente al comportamiento y la estabilidad del algoritmo en descargas y pequeñas cargas, puesto que la superficie de fluencia puede ser puntual o pequeña. Lo segundo provoca que la tensión (*trial stress*) resida ocasionalmente cerca o sobre la tangente a la superficie límite. Entonces, debe asegurarse la continuidad de las deformaciones en ese límite, lo que se consigue anulando las deformaciones plásticas a medida que dicho tensor se aproxime a la tangente. En caso de no hacerse de este modo existirá una discontinuidad que puede provocar la no convergencia del problema durante la búsqueda de solución. Esto se solventa si se escoge la regla asociativa (opción adoptada en este trabajo) o cualquier otra con potencial definido de tal forma que se cumpla la condición anterior.

Para desarrollar el algoritmo numérico de búsqueda de solución para cada punto de integración en el programa de elementos finitos en el que se instale, se asumirán conocidas todas las variables en el instante de “tiempo”  $n$  y se calcularán las del instante de tiempo  $n + 1$ . Los subíndices  $n$  y  $n + 1$  en las variables indican el instante al que se refieren. Se asumirá también conocido el tensor incremento de deformaciones desviadoras  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  entre dichos instantes. El algoritmo es el siguiente:

- 1) Conocidos  $\boldsymbol{\sigma}_0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{0_n}$  y  $\boldsymbol{\beta}_n$  y partiendo de la expresión para el parámetro  $k$  del apéndice, calcular

$$k_n = -\frac{n_1}{n_2} \hat{\mathbf{t}}_1 : \hat{\mathbf{t}}_2 \pm \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \hat{\mathbf{t}}_1 : \hat{\mathbf{t}}_2 + \frac{R^2 - n_1^2}{n_2^2}} \quad (20)$$

donde

$$\begin{aligned} n_1 &= \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\beta}_n\| \\ \hat{\mathbf{t}}_1 &= \frac{\boldsymbol{\sigma}_n}{n_1} - \boldsymbol{\beta}_n \\ n_2 &= \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_{0_n}\| \\ \hat{\mathbf{t}}_1 &= \frac{\boldsymbol{\sigma}_n}{n_1} - \boldsymbol{\sigma}_{0_n} \end{aligned}$$

En el caso de que  $\sigma = \sigma_0$ , hacer  $\sigma = \sigma_0 + \epsilon R(\mathbf{C}:\Delta\epsilon)/\|\mathbf{C}:\Delta\epsilon\|$  (ver apéndice), donde  $k_n = 1/\epsilon$  es un número grande que depende de la máquina y de la precisión escogidas.

Las dos soluciones para  $k_n$  se corresponden con los dos posibles valores que surgen de la definición de  $k$ , esto es, aquellos que proporcionan las dos posibles tensiones imagen  $\hat{\sigma}$  en la superficie límite. El valor positivo es el válido.

Esta forma de calcular  $k_n$  evita errores de redondeo cuando el radio de la superficie de fluencia es casi nulo. En efecto, si  $\epsilon' = p_n \rightarrow 0$ , entonces  $n_2 \rightarrow 0$  y  $k_n = 1/\epsilon' - 1 \approx 1/\epsilon' \rightarrow \infty$ , lo que es muy importante para la estabilidad del algoritmo. Por lo tanto, las ecuaciones deben calcularse de la forma mostrada o de una forma equivalente en el sentido de que deben proporcionar valores consistentes incluso cuando el radio de la superficie límite tienda a cero y el endurecimiento a infinito o cuando el paso de carga sea muy pequeño.

2) Comprobar si el material descarga. Definiendo  $\sigma_{n+1}^{tr} = \mathbf{C}:\Delta\epsilon$ , si  $\sigma_{n+1}^{tr}:\hat{\mathbf{n}}_n < 0$ , entonces hacer  $\sigma_{0_n} = \sigma_n$  y proceder de nuevo al paso 1.

Nótese que ni  $\Delta k$  ni la función de fluencia evaluada para la tensión de prueba  $\sigma_{n+1}^{tr}$  pueden usarse para esta tarea, ya que es posible que  $\sigma_{n+1}^{tr}:\hat{\mathbf{n}}_n < 0$  y tanto  $\Delta k > 0$  como  $f_{n+1}^{tr} = (\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n):(\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n) - (p_n R)^2 > 0$ . Esto puede suceder ya que  $r_n = p_n R$  puede ser muy pequeño (Figura 3). Durante el periodo iterativo de búsqueda de solución puede ocurrir que la tensión de prueba resida fuera de la superficie de fluencia, pero  $(\sigma_{n+1}^{tr} - \sigma_n)$  corte dicha superficie. Esto conduce a ignorar un proceso de descarga o, en el caso de que alternativamente resida dentro y fuera durante el proceso de búsqueda de equilibrio global, a la imposibilidad de llegar a una solución convergente. Por lo tanto, la condición de normalidad debe ser la utilizada, ya que aunque en la formulación continua es equivalente a las otras dos, esto no es cierto en la discreta.

**Figura 3.** Inconsistencia de  $\Delta k$  y  $f_{n+1}^{tr}$  en el análisis de la condición de descarga

3) Calcular

$$p_n = \frac{1}{1 + k_n} \quad (21)$$

$$\alpha_n = \sigma_{0_n} + p_n(\beta_n - \sigma_{0_n}) \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n = \frac{(\sigma_n - \alpha_n)}{\|\sigma_n - \alpha_n\|} \quad (23)$$

4) Calcular  $H_n(k_n)$  y  $\hat{H}_n$  de forma conjunta como

$$\bar{H}_n = \hat{H}_n + [R - \hat{\mathbf{n}}_n:(\sigma_{0_n} - \beta_n)]p_n^2 s_n H_n \quad (24)$$



donde, debido a que puede ocurrir que  $p_n \rightarrow 0$ , se usan las siguientes expresiones consistentes

$$s_n = \frac{\frac{1}{p_n}n_1(\hat{\mathbf{t}}_1: \hat{\mathbf{n}}) + \frac{1}{p_n}k_n n_2(\hat{\mathbf{t}}_2: \hat{\mathbf{n}})}{n_1 n_2(\hat{\mathbf{t}}_1: \hat{\mathbf{t}}_2) + k_n n_2^2} \quad (25)$$

$$H_n = H_n(p_n); \text{ para función exp.: } H_n = h k_n^m + \hat{H}_n = \frac{2}{3} h' k_n^m + \frac{2}{3} H'_n \quad (26)$$

El endurecimiento  $H_n$  debe ser calculado también consistentemente en caso de que los errores de redondeo para  $p_n \rightarrow 0$  fuesen importantes.

- En el caso de carga monodimensional se puede demostrar que  $[R - \hat{\mathbf{n}}_n: (\boldsymbol{\sigma}_{0_n} - \boldsymbol{\beta}_n)] p_n^2 s_n = 1$ .  
 5) Calcular  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} = \mathbf{C}_n^* : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , donde se puede usar  $\mathbf{C}_n^* = \mathbf{C}$  (tensor elástico de cuarto orden) o  $\mathbf{C}_n^* = \mathbf{C}_n^{ep}$  (tensor elastoplástico tangente), donde

$$\mathbf{C}_n^{ep} = \mathbf{C}_{n-1}^{ep} - \frac{\hat{\mathbf{n}}_n: \mathbf{C}_{n-1}^{ep} \otimes \hat{\mathbf{n}}_n: \mathbf{C}_{n-1}^{ep}}{\hat{\mathbf{n}}_n: \mathbf{C}_{n-1}^{ep}: \hat{\mathbf{n}}_n + \bar{H}_n} \quad (27)$$

La elección no afecta a la solución, únicamente a la velocidad de convergencia.

- 6) Iteración  $i$  sobre  $p_{n+1}^i$ , donde  $p_n < p_{n+1}^i < p(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr})$ , para el cálculo de las variables en el instante  $n + 1$ . Para un valor de prueba  $p_{n+1}^i$ :
- 6.1) Calcular el parámetro de consistencia  $\gamma_{n+1,1}^i$  a partir de la ecuación de consistencia escogiendo el mínimo de (el otro valor se corresponde con el retorno a la parte opuesta de la superficie de fluencia)

$$\gamma_{n+1,1}^i = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \quad (28)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= (\hat{H}_{n+1}^i)^2 + n_3^2 + 2\hat{H}_{n+1}^i n_3(\hat{\mathbf{t}}_3: \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^i) \\ b &= -\{(\hat{H}_{n+1}^i)^2(\hat{\mathbf{t}}_3: \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^i) + n_3(\hat{\mathbf{t}}_3: \hat{\mathbf{t}}_4)\}n_4 \\ c &= n_4^2 - (p_{n+1}^i R)^2 \\ n_3 &= \|\mathbf{C}_n^*: \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^i\| \\ \hat{\mathbf{t}}_3 &= \frac{1}{n_3}(\mathbf{C}_n^*: \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^i) \\ n_4 &= \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \boldsymbol{\alpha}_{n,n+1}^i\| \\ \hat{\mathbf{t}}_4 &= \frac{1}{n_4}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \boldsymbol{\alpha}_{n,n+1}^i) \\ \boldsymbol{\alpha}_{n,n+1}^i &= \boldsymbol{\sigma}_{0_n} + p_{n+1}^i(\boldsymbol{\beta}_n - \boldsymbol{\sigma}_{0_n}) \\ \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^i &= \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \boldsymbol{\alpha}_{n,n+1}^i}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \boldsymbol{\alpha}_{n,n+1}^i\|} = \hat{\mathbf{t}}_4 \end{aligned}$$

- 6.2) Calcular el parámetro de consistencia  $\gamma_{n+1,2}^i$  a partir de la ecuación constitutiva

$$\gamma_{n+1,2}^i = \int_{p_n}^{p_{n+1}^i} \frac{1}{-p^2 s H} dp \quad (29)$$

donde tanto  $H$  como  $m$  son funciones de  $p$ . Por ejemplo, usando por simplicidad y bondad la regla del punto medio (en  $p$ ) para evaluar la integral

$$p^* = \frac{p_{n+1}^i - p_n}{2} \quad (30)$$

$$\gamma_{n+1,2}^i = \frac{(p_{n+1}^i - p_n)}{d^*} \quad (31)$$

donde

$$d^* = p_{n+1} H^* \frac{n_6/n_5(\hat{\mathbf{t}}_6: \hat{\mathbf{n}}^*) + (1/p^* - 1)(\hat{\mathbf{t}}_5: \hat{\mathbf{n}}^*)}{n_6(\hat{\mathbf{t}}_5: \hat{\mathbf{t}}_6) + (1/p^* - 1)n_5} \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{n}}^* = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \boldsymbol{\alpha}^*}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \boldsymbol{\alpha}^*\|} \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\sigma}_{0_n} + p^*(\boldsymbol{\beta}_n - \boldsymbol{\sigma}_{0_n}) \quad (34)$$

$$n_5 = \|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\alpha}^*\|$$

$$\hat{\mathbf{t}}_5 = \frac{1}{n_5}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\alpha}^*)$$

$$n_6 = \|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\beta}^*\|$$

$$\hat{\mathbf{t}}_6 = \frac{1}{n_6}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\beta}^*)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \gamma_{n+1,1}^* \hat{\mathbf{n}}^* \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta}_n + \gamma_{n+1,1}^* \hat{\mathbf{H}}^* \hat{\mathbf{n}}^* \quad (36)$$

$$\hat{\mathbf{H}}^* = \hat{\mathbf{H}}((\cdot)^*) \quad (37)$$

y  $\gamma_{n+1,1}^*$  se obtiene de la ecuación de consistencia para los valores  $(\cdot)^*$ .

Calcular el error de la iteración  $i$  como

$$\text{error}^i := \gamma_{n+1,1}^i - \gamma_{n+1,2}^i \quad (38)$$

Si  $|p_{n+1}^i - p_{n+1}^{i-1}|/p_{n+1}^i$  es menor que cierta tolerancia relativa determinada por el usuario sobre  $p \in [0, 1)$ , o el valor absoluto de error <sup>$i$</sup>  es menor que cierta tolerancia absoluta determinada por el usuario sobre  $\gamma_{n+1}$ , salir del proceso iterativo en  $p_{n+1}^i$  y actualizar los valores-solución de tensiones. En caso contrario, realizar la búsqueda de un nuevo valor para  $p_{n+1}^{i-1}$ . Cualquiera de los algoritmos de búsqueda disponibles es válido. El que se ha usado en este tabajo es el de Brent<sup>25</sup>.

El algoritmo es estable e incondicionalmente convergente.

Una vez que se ha obtenido el tensor desviador  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ , se le añade la parte hidrostática para calcular el tensor completo

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + K \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \quad (39)$$

donde  $K$  denota el módulo de compresión hidrostático y  $\text{tr}(\cdot)$  la traza del tensor.

## DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS INTERNOS

En este trabajo se ha empleado la función exponencial con superficie límite no traslacional como módulo de endurecimiento debido a su idoneidad<sup>21</sup> para el tipo de suelos a analizar. Una descripción detallada del significado y la influencia de los parámetros  $h$  y  $m$  del modelo en el comportamiento del mismo ha sido realizado anteriormente en otros estudios<sup>11,23</sup>. No obstante, aquí se inferirán dichos parámetros directamente de las curvas de degradación del módulo de rigidez a cortante en función de la deformación  $\theta(\gamma_s) = G(\gamma_s)/G_{\max}$ , comúnmente usadas en ingeniería geotécnica y requeridas por el conocido programa de análisis lineal equivalente SHAKE. El módulo inicial  $G_{\max}$  puede ser obtenido a partir de los perfiles de velocidades de propagación de ondas a cortante. El radio  $R$  de la superficie límite puede ser estimado a partir de ensayos de penetración<sup>23</sup> o, en ausencia de los mismos, a partir de las mismas curvas de degradación del módulo de rigidez a cortante. Este último procedimiento será el usado en este trabajo.

Conocido el valor de  $\theta$  para una deformación grande  $\gamma_s$ , el radio de la superficie límite tendrá que ser superior a

$$\bar{R} = \sqrt{2}\gamma_s\theta G_{\max} \quad (40)$$

y por lo tanto el radio  $R$  puede ser estimado aproximadamente a partir de tal valor  $\bar{R}$ . La exactitud de la estimación carece completamente de importancia si se sigue el procedimiento a continuación señalado en la determinación de los parámetros  $h$  y  $m$ . Para valores incluso dos órdenes de magnitud mayores en  $R$ , los parámetros  $h$  y  $m$  equilibrarán la diferencia para el rango de deformaciones de interés. Además, es necesario resaltar que si se deseara reproducir mejor la curva de reducción del módulo a cortante bastaría con incluir más puntos en el sistema y escoger una función tipo

$$H = \sum_{i=1}^{N/2} h_i k^{m_i}$$

donde  $N$  es el número (par) de puntos.

Para calcular dichos parámetros de la función de endurecimiento, se asumirán conocidos dos puntos significativos de la curva de reducción del módulo a cortante y se denotarán por  $[\gamma_{s1}, \theta_1]$  y  $[\gamma_{s2}, \theta_2]$ . Por ejemplo, dos puntos representativos pueden ser  $[\gamma_{s1}(\theta = 0, 8); 0, 8]$ ,  $[\gamma_{s1}(\theta = 0, 3); 0, 3]$ . Aunque cualquier otro punto sería en principio válido si éste es distinto de  $\theta = 1$  y de  $\theta = 0$ , los puntos cercanos a los mencionados presentarán menor sensibilidad y equilibrarán los errores para distintos valores de deformación respecto a la curva que se quiere reproducir. Para cada uno de los puntos prescritos la tensión cíclica bajo comportamiento a cortante puro monodimensional será  $\tau = \theta G_{\max} \gamma_s$  y la ecuación constitutiva, tras ciertas manipulaciones, se convierte en

$$\gamma_s = \frac{\tau}{G_{\max}} + \frac{1}{h} \int_{-\tau}^{\tau} \left( \frac{\xi + \tau}{R/\sqrt{2} - \xi} \right)^m d\xi \quad (41)$$

Por lo tanto, resolviendo el sistema de dos ecuaciones no-lineales se obtienen los valores de  $h$  y  $m$ . En este estudio se ha utilizado un algoritmo de Powel híbrido modificado<sup>26</sup> para resolver el sistema. En este punto cabe decir que, puesto que al realizar experimentos se comienza desde el estado virgen de tensiones, los ciclos no variarán desde  $-\tau$  hasta  $\tau$ , por lo que incluso tras gran cantidad de ciclos existirá un desplazamiento del centro de los mismos y una cierta asimetría respecto a dicho punto. Calculando pues los parámetros  $h$  y  $m$  a partir del estado virgen tras haber producido varios ciclos de deformación, se obtendrán valores ligeramente diferentes (aprox. 5 %), posiblemente más cercanos a la realidad experimental

y más alejados de hipótesis teórica. Este último procedimiento es el que se ha seguido en este estudio.

Por otro lado, una estimación diferente del radio  $R$  produciría distintos valores de  $m$  y principalmente de  $h$ , de tal forma que la curva de reducción del módulo a cortante  $\theta\gamma_s$  sigue pasando por los puntos estipulados. Si dichos puntos son representativos y la estimación de  $R$  está al menos dentro del orden de magnitud, la curva será aproximadamente la misma para el rango de deformaciones de interés.

Finalmente, es importante observar que este modelo requiere menos parámetros que los modelos lineales equivalentes tipo SHAKE, en contraposición con la creencia general en la comunidad geotécnica de que los modelos de comportamiento plástico para suelos requieren más parámetros<sup>4</sup>. En efecto, tomando por ejemplo el programa SHAKE, éste requiere no sólo la curva de degradación del módulo a cortante, sino también la de amortiguamiento en función de la deformación y un parámetro adicional determinado a partir de la magnitud del terremoto que traduce deformaciones máximas en deformaciones “efectivas” con las que calcular las propiedades equivalentes. En este nuevo procedimiento las curvas de amortiguamiento son inherentes al modelo escogido (exponencial) y no se requiere ningún conocimiento de la magnitud del acelerograma a imponer, puesto que el comportamiento es realmente no-lineal.

## EJEMPLOS

A continuación a modo de verificación del modelo y para mostrar sus características, se incluyen ejemplos bajo cargas unidireccional, bidireccional y tridireccional cuasiestáticas y bajo carga sísmica bidireccional.

### Carga unidireccional

La Figura 4 muestra los límites de las curvas de reducción del módulo  $G$  para suelos arenosos obtenidas experimentalmente por Seed e Idriss<sup>2</sup> en 1970. Ambas curvas delimitan el rango de curvas típico para dichos suelos. Se han usado estas curvas para comporbar el modelo, forzando los valores  $\theta_1$  y  $\theta_2$  para las deformaciones angulares (ingenieriles)  $\gamma_{s1} = 0,01\%$  y  $\gamma_{s2} = 0,1\%$ . Una estimación  $\bar{R}$  del radio  $R$  de la superficie límite se obtuvo de una deformación  $\gamma_{s3}(\theta_3)$  que proporciona un valor bajo de módulo a cortante ( $\theta_3 = 0,1$ ). La estimación usada es

$$\bar{R} = 10\gamma_{s3}\theta_3G_{\max}$$

Nótese que  $R$  ha de ser forzosamente mayor que  $\sqrt{2}\gamma_{s3}\theta_3G_{\max}$ . Para verificar la influencia de una posible estimación pobre en las curvas  $\theta(\gamma_s)$  se han realizado las curvas que se obtendrían para valores de  $R = 0,2\bar{R}$ ,  $R = 10\bar{R}$  y  $R = 100\bar{R}$ . Únicamente a deformaciones muy grandes la influencia ha sido significativa y para los valores de deformación usuales representados en la figura las diferencias eran menores del 1 %, por lo que se omiten dichas curvas. En dichas curvas también se observa como puntos  $[\theta, \gamma_s]$  más significativos dan una mejor reproducción de la curva. La Figura 5 muestra un ejemplo de los ciclos tensión-deformación resultantes en cortante unidimensional para la curva inferior de la Figura 4. Los parámetros para la misma son  $R = 200$  kPa,  $G_{\max} = 40$  MPa,  $h = 371,5$  kPa y  $m = 1,62$ . El estudio detallado desarrollado por Borja y Amies<sup>21</sup> es aplicable al modelo, ya que en carga unidireccional monotonica cuasiestática ambos modelos coinciden con el modelo exponencial monodimensional que se pretende extender a tres dimensiones.

**Figura 4.** Comparación de las curvas de reducción del módulo a cortante obtenidas por Seed e Idriss en 1970 con las obtenidas por el modelo exponencial tras haber prescrito los valores para  $\gamma = 0,01\%$  y  $\gamma = 0,1\%$

**Figura 5.** Ejemplo de ciclo tensión-deformación para  $\gamma_{\max} = \pm 1\%$

### Carga multiaxial cuasiestática

En la Figura 6 se muestran tres funciones senoidales de pulsación  $\omega$ ,  $2\omega$  y  $3\omega$  que han sido aplicadas a modo de deformaciones angulares unitarias en las tres direcciones ortogonales que se denominaron  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  respectivamente. Se ha usado el rango inferior para suelos arenosos del apartado anterior y sus respectivos parámetros y se ha aplicado la carga en un total de 100 pasos.

Cuando se aplica la sollicitación en una sola dirección, por ejemplo la  $xy$ , el modelo es monodireccional. Los procesos de descarga aparecen únicamente en los extremos (máximos y mínimos) de la excitación. En esos instantes el módulo de endurecimiento es infinito y comienza a evolucionar reduciéndose. El modelo se comporta en este caso como el de

Dafalias y Popov<sup>15</sup>. Las tensiones cortantes  $xy$  son mostradas en la Figura 7 en función del paso de carga.

**Figura 6.** Deformaciones angulares unitarias impuestas en las direcciones  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$

**Figura 7.** Tensiones cortantes  $xy$  resultantes tras imponer únicamente las deformaciones angulares  $xy$

Si la carga es aplicada simultáneamente en las direcciones  $xy$  y  $xz$ , el comportamiento en la dirección  $xy$  cambia como consecuencia del acoplamiento. La Figura 8 muestra la evolución de la tensión cortante correspondiente tras el acoplamiento con la dirección  $xz$ . Para este caso de carga biaxial es conveniente la representación en el plano  $x$  tanto de tensiones como de deformaciones. La Figura 9a muestra la trayectoria de las deformaciones impuestas (una curva de Lissajous) y la Figura 9b muestra la trayectoria de las tensiones resultantes, donde por comodidad visual se ha dibujado un círculo de radio  $Rd$  menor que el radio real  $R$  de la superficie límite.

**Figura 8.** Efecto del acoplamiento no-lineal de las diferentes direcciones en las tensiones cortantes  $xy$

**Figura 9.** Trayectorias de deformaciones (a) y de tensiones (b) en el plano  $x$  al aplicar las cargas en las direcciones  $xy$  y  $xz$ .  $Rd$  es el radio del círculo dibujado,  $R$  el radio de la superficie límite

Si se aplica la carga en la dirección  $yz$  se produce un acoplamiento múltiple resultando por ejemplo la evolución de tensiones en la dirección  $xy$  también mostrada en la Figura 8. En el caso de análisis tridimensional es conveniente la representación en el plano de proyección isométrica de tensiones o deformaciones principales (plano  $\pi$ ). La Figura 10a muestra las trayectorias de deformaciones en dicho plano y la 10b las de tensiones. De la comparación de ambas trayectorias también se deduce la influencia del acoplamiento plástico en la evolución de las tensiones. Si el comportamiento fuese lineal, la forma de ambas curvas coincidiría, ya que únicamente las diferenciaría el escalado por el módulo de elasticidad. En este caso la forma es distinta debido a la plastificación y al acoplamiento.

**Figura 10.** Trayectorias de deformaciones (a) y de tensiones (b) en el plano  $\pi$  al aplicar las cargas en las tres direcciones.  $Rd$  es el radio del círculo dibujado,  $R$  el radio de la superficie límite

### Carga dinámica multiaxial

Como ejemplo de carga dinámica multiaxial se considera una carga sísmica en dos direcciones; N-S (norte-sur) y E-W (este-oeste) en forma de acelerogramas, mostrados en las Figuras 11a y 11b. Estas excitaciones han sido recogidas en el emplazamiento LSST (Large Scale Seismic Test) en Lotung (Taiwan). En dicho emplazamiento, que es zona sísmicamente activa, el EPRI (Electric Power Research Institute) construyó dos reactores nucleares a escala e instrumentalizó la zona para poder registrar el comportamiento del suelo con y sin interacción terreno-estructura<sup>27,28,29</sup>. El programa de ensayos allí llevado a cabo es ampliamente conocido por la comunidad geotécnica. El 20 de mayo de 1986 (LSST07) se recogieron, entre otros, los acelerogramas de dichas figuras a 11 metros de profundidad en la localización de acelerómetros denominada DHB. Las propiedades del suelo han sido analizadas por diversos grupos de investigación a través de diferentes métodos, obteniendo diferentes curvas de reducción del módulo a cortante dependientes o no de la profundidad. En este estudio, tomando como base las de Anderson<sup>28</sup>, se prescribieron los valores de  $\theta(\gamma_s = 0,01 \%) = 0,80$  y  $\theta(\gamma_s = 0,1 \%) = 0,35$  para el suelo hasta los 11 metros de profundidad que se toman para este ejemplo.

El algoritmo numérico para determinar las tensiones en cada punto de integración expuesto hasta ahora ha sido implementado en el programa de elementos finitos SPECTRAII. Dicho programa es una modificación de SPECTRA, que contiene elementos tipo “stick”<sup>23</sup>, elementos tridimensionales de 8 nudos a los cuales se les han eliminado las funciones de forma que no son dependientes únicamente de la coordenada (vertical) del elemento. Estos elementos presentan comportamiento a cortante tipo viga-Timoshenko, pero sin la componente de flexión, y por lo tanto son capaces de predecir el comportamiento de estratos paralelos de dimensiones horizontales infinitas sometidos a excitaciones cortantes o de compresión propagándose según el eje los mismos.

Para modelar los 11 m de terreno de este análisis se han usado dichos elementos con longitudes de 1 m, totalizando 12 elementos. La integración usada es gaussiana de 2 puntos y puede demostrarse que no se produce bloqueo<sup>23</sup>.



**Figura 11.** Acelerogramas recogidos en Lotung (Taiwan) durante el terremoto del 20 de mayo de 1986 (LSST07) a 11 metros de profundidad. Brazo FA-1, punto DHB

Los módulos de cortante iniciales  $G_{\max}$  para cada elemento han sido determinados a partir de perfiles de velocidades de ondas  $S^{30}$  y se muestran en la Figura 12. El peso específico medido en la zona es aproximadamente de  $19,0 \text{ kN/m}^3$ .

El algoritmo de integración en el tiempo es el HHT<sup>31</sup> con  $\alpha = -0,1$ , el paso de tiempo empleado es de  $\Delta t = 0,02 \text{ s}$  y el intervalo de muestreo de los acelerogramas en campo de  $0,005 \text{ s}$ .

Tras imponer las aceleraciones registradas a 11 m de profundidad, en las Figuras 13a y 13b se comparan las predicciones en la superficie (análisis acoplado) con los registros del lugar entre 8 y 20 s (la parte más significativa). La correlación de resultados es buena tanto para bajas como para altas excitaciones. La peor predicción para los instantes de 11

a 13 s puede ser entre otras causas debida al incremento de presión efectiva observado en Lotung durante dicho terremoto, por lo que será conveniente incluir este grado de libertad en el modelo para obtener resultados aún mejores. A modo de ejemplo, en la Figura 14a se muestran las trayectorias de deformaciones angulares unitarias a 10,71 m y en la 14b las de tensiones.

Un análisis más detallado del comportamiento del emplazamiento para los 47 m de los que se disponen acelerogramas está siendo realizado actualmente por los autores.

**Figura 12.** Perfil de módulos a cortante iniciales utilizado

**Figura 13a).** Continuación

**Figura 13b).** Comparación de la predicción obtenida con los acelerogramas registrados en campo. Ampliación de la zona entre 8 y 20 segundos

**Figura 14.** Trayectorias de deformaciones angulares unitarias (a) y de tensiones cortantes (b) a 10,71 m de profundidad

## CONCLUSIÓN

En este artículo se ha desarrollado un modelo de plasticidad tridimensional de dos superficies para suelos cohesivos con ausencia de rango elástico, el cual permite la utilización de modelos monodimensionales ampliamente conocidos por la comunidad geotécnica en análisis tridimensionales con las direcciones acopladas. Además, si se usa el modelo exponencial de endurecimiento, los parámetros del mismo pueden ser determinados automáticamente de las tradicionales curvas de reducción del módulo a cortante en función de la deformación, y por lo tanto los datos requeridos son menores que en modelos lineales equivalentes.

Se ha mostrado asimismo un algoritmo computacional para el modelo que evita las inestabilidades numéricas que pueden surgir por la ausencia de rango elástico y/o por la posible naturaleza aleatoria de la excitación. El algoritmo ha sido ensayado tanto bajo cargas cuasiestáticas como sísmicas, mostrando efectos del acoplamiento no-lineal entre las diferentes direcciones. Las predicciones son buenas tanto cuando las deformaciones

son pequeñas como cuando son relativamente grandes, debido a que el comportamiento es realmente no-lineal, y por lo tanto las propiedades del material varían en función del tensor de deformaciones en cada instante. Esto no es posible en programas lineales equivalentes, por lo que las predicciones de los mismos son únicamente buenas en ciertos rangos de frecuencia.

No obstante, el modelo necesita ser verificado en análisis más complejos de interacción terreno-estructura en los que se presenten fenómenos de interferencia y refracción. Además, es un modelo de carácter desviador, por lo no es afectado por el valor de primer invariante de tensiones. Esto implica la imposibilidad de predecir incrementos de presión efectiva y la aparición del fenómeno de licuefacción. Se está realizando actualmente la adaptación del modelo para poder predecir tales efectos.

## AGRADECIMIENTOS

Este proyecto ha sido posible gracias a la financiación completa de la estancia del primer autor en la Universidad de Stanford por parte del Ministerio de Educación y Cultura Español. Dicho autor agradece además la acogida recibida por el J.A. Blume Earthquake Engineering Center de dicha Universidad. El segundo autor ha tenido soporte financiero por el Earthquake Hazard Mitigation Program de National Science Foundation. Los datos digitalizados de Lotung han sido proporcionados por el Dr. H.T. Tang del EPRI.

## APÉNDICE

### Cálculo del parámetro $k$

De la definición de  $k$  y  $\hat{\sigma}$

$$(\hat{\sigma} - \beta):(\hat{\sigma} - \beta) = R^2$$

por lo que

$$[\sigma + k(\sigma - \sigma_0) - \beta]:[\sigma + k(\sigma - \sigma_0) - \beta] = R^2$$

y operando y despejando  $k$  se obtiene

$$k = \frac{-(\sigma - \beta):(\sigma - \sigma_0) + \sqrt{[(\sigma - \beta):(\sigma - \sigma_0)]^2 + \|\sigma - \sigma_0\|(R^2 - \|\sigma - \beta\|^2)}}{\|\sigma - \sigma_0\|^2} \quad (42)$$

### Cálculo de $\dot{k}$

Partiendo de la misma ecuación que para el cálculo de  $k$  y tomando su derivada “temporal”

$$2[\sigma + k(\sigma - \sigma_0) - \beta]:[\dot{\sigma} + \dot{k}(\sigma - \sigma_0) + k(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0) - \dot{\beta}] = 0$$

Despejando  $\dot{k}$ , se obtiene

$$\dot{k} = -\frac{[(1+k)(\sigma - \beta) + k(1+k)(\sigma - \sigma_0)]:(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0) - [(\sigma - \beta) + k(\sigma - \sigma_0)]:\dot{\beta}}{(\sigma - \beta):(\sigma - \sigma_0) + k\|\sigma - \sigma_0\|^2} \quad (43)$$

### Cálculo de $\partial k / \partial \sigma$

De la ecuación anterior es inmediato deducir el siguiente tensor de segundo orden

$$\frac{\partial k}{\partial \sigma} = - \frac{(1+k)(\sigma - \beta) + k(1+k)(\sigma - \sigma_0)}{(\sigma - \beta) : (\sigma - \sigma_0) + k \|\sigma - \sigma_0\|^2} \quad (44)$$

### Cálculo de la dirección de fluencia cuando $p \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 2(\sigma - \alpha)$$

Si  $p = 0$ , entonces  $\sigma = \alpha = \sigma_0$ , y por lo tanto haciendo  $h \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0 + h\dot{\sigma}) = \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}(\sigma = \sigma_0)h\dot{\sigma} = 2h\mathbf{I} : \dot{\sigma}$$

y por lo tanto

$$\hat{\mathbf{n}}(p = 0) = \frac{\dot{\sigma}}{\|\dot{\sigma}\|} \quad (45)$$

### Demostración de la equivalencia de $\dot{k}(\dot{\sigma}) > 0$ con $\hat{\mathbf{n}} : \dot{\sigma} < 0$

Por simplicidad se hace la demostración para el caso de superficie límite fija; esto es  $\beta = 0$ ,  $\dot{\beta} = 0$ ,  $\dot{\sigma}_0 = 0$ . Para este caso

$$\dot{k} = - \frac{(1+k)\sigma + k(1+k)(\sigma - \sigma_0)}{\sigma : (\sigma - \sigma_0) + k \|\sigma - \sigma_0\|^2} : \dot{\sigma} \quad (46)$$

De la definición de  $\hat{\mathbf{n}}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\sigma - \alpha}{\|\sigma - \alpha\|} \\ &= \frac{\sigma - \sigma_0 + 1/(1+k)\sigma_0}{\|\sigma - \alpha\|} \\ &= \frac{(1+k)\sigma + k(1+k)(\sigma - \sigma_0)}{(1+k)^2 \|\sigma - \alpha\|} \end{aligned} \quad (47)$$

Puesto que ambos numeradores coinciden en que  $(1+k)^2 \|\sigma - \alpha\| > 0$  por ser números positivos y en que  $\sigma : (\sigma - \sigma_0) + k \|\sigma - \sigma_0\|^2 = \hat{\sigma} : (\sigma - \sigma_0) > 0$  debido a la convexidad de la superficie límite, ambas condiciones son equivalentes.

## REFERENCIAS

- 1 R.I. Borja, W.H. Wu y H.A. Smith, "Nonlinear response of vertically oscilating rigid foundations", *J. Geotech. Engng.*, Vol. **119**, pp. 893–911, (1993).
- 2 H.B. Seed y I.M. Idriss, "Soil moduli and damping factors for dynamic response analysis", Informe EERC 70-10, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, (1970).
- 3 P.B. Schnabel, J. Lysmer y H.B. Seed, "SHAKE: A computer program for earthquake response analysis of horizontalaly layered sites", Informe EERC 72-12, Earthquake Engineering Research Center, University of California, B erkeley, (1972).
- 4 S.L. Kramer, "*Geotechnical Earthquake Engng.*", Prentice- Hall, New Jersery, USA, (1996).
- 5 S. Gupta, J. Penzien, T.W. Lin y C.S. Yeh, "Theree dimensional hybrid modelling of oil-structure interaction", *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, Vol. **10**, pp. 69–87, (1982).
- 6 J. Lysmer, T. Udaka, C.F. Tsai y H.B. Seed, "FLUSH-A computer program for approximate 3D analysis of soil-structure interaction problem", Informe EERC 75-30, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, (1975).
- 7 V.L. Streeter, E.B. Wylie y F.E. Richart, "Soil motion computations by characteristics methods, *Proceedings ASCE National Structural Engineering Conference*, San Francisco, USA, (1973).
- 8 P.P. Martin y H.B. Seed, "MASH-A computer program for the nonlinear analysis of vertically propagating shear waves in horizontally layered soil deposits", Informe EERC 78-23, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, (1978).
- 9 R.M. Pyke, "TESS1: A computer program for nonlinear ground response analysis", TAGA Engineering Software Services, California University, Lafayette, (1985).
- 10 M.K.W. Lee y W.D. Finn, "DESDRA-2: Dynamic effective response analysis of soil deposits with energy transmitting boundary including assessment of liquefaction potential", *Soil Mechanics Series*, Vol. **38**, University of British Columbia Vancouver, Canadá, (1978).
- 11 R.I. Borja, W.H. Wu, A.P. Amies y H.A. Smith, "Nonlinear lateral, rocking and torsional vibration of rigid foundations", *J. Geotech. Engng.*, Vol. **120**, pp. 491–513, (1994).
- 12 Z. Mróz, "On the description of anisotropic work-hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **15**, pp. 163–175, (1967).
- 13 Z. Mróz, V.A. Norris y O.C. Zienkiewicz, "Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elastoplastic deformation of soils", *Geotéchnique*, Vol. **29**, pp. 1–34, Londres, (1979).
- 14 J.H. Prevost, "Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behavior", *Int. J. Num. Meth. Geomech.*, Vol. **2**, pp. 195–216, Londres, (1977).
- 15 Y.F. Dafalias y E.P. Popov, "Cyclic loading for materials with a vanishing elastic region", *Nuclear Engng. Des.*, Vol. **41**, pp. 293–302, (??).
- 16 Y.F. Dafalias y L.R. Hermann, "*Soil mechanics-transient and cyclic loads*, Chapter 10: "Bounding surface formulation of soil plasticity, G.N. Pande y O.C. Zienkiewicz (Eds.), John Wiley, New York, USA, (1982).
- 17 T.J.R. Hughes, "Stress-point algorithm for a pressure-sensitive multiple yield surface plasticity theory", Informe UCJD-19339, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California, (1982).
- 18 S. Salah-mars y E. Kavazjian Jr., "A virutal surface concept for nested yield surface plasticity", *Int. J. Num. Meth. Geomech.*, Vol. **16**, pp. 779–796, (1992).

- 19 G. Masing, "Eigenspannungen und Verfertigung beim Messing", *Proceedings 2nd. Int. Congress on Appl. Mech.*, Zurich, (1926).
- 20 J.H. Atkinson y S.E. Stallebrass, "A model for recent stress- history and non-linearity in the stress-strain behavior of over consolidated soil", *Proceedings 7 IACMAG*, Cairns, pp. 555–560, (1991).
- 21 R.I. Borja y A.P. Amies, "Multiaxial cyclic plasticity model for clays", *J. Geotech. Engng.*, Vol. **120**, pp. 1051–1069, (1994).
- 22 R.I. Borja y W.H. Wu, "Vibration of foundations on incompressible soils with no elastic region", *J. Geotech. Engng.*, Vol. **120**, pp. 1570–1592, (1994).
- 23 H.Y. Chao, "Nonlinear dynamic soil-structure interaction analysis and application to Lotung problem", Tesis doctoral, Stanford University, (1996).
- 24 R.D. Krieg y S.W. Key, "Implementation of a time-independent plasticity theory into structural computer programs", *Constitutive equations in viscoplasticity: computational and engineering aspects*, J.A. Stricklin y K.J. Saczalski (Eds.), ASME, New York, USA, (1976).
- 25 R.P. Brent, "An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function", *The Computer J.*, Vol. **14**, pp. 422–425, (1971).
- 26 J. More, B. Garbow y K. Hillstorn, "User guide for MINPACK 1", Informe ANL-80-74, Argone National Labs, Argone, Illinois, USA, (1980).
- 27 H.T. Tang, "Large scale soil structure interaction", Informe NP-5513-SR, EPRI, Palo Alto, California, USA, (1987).
- 28 D.G. Anderson, "Geotechnical synthesis report for the Lotung large-scale seismic experiment", Informe TR-102362-SR, EPRI, Palo Alto, California, USA, (1993).
- 29 C.Y. Chang, C.M. Mok, M.S. Power y Y.K. Tang, "Analysis of ground response data at Lotung large scale soil-structura interaction experiment site", Informe NP-7306-SL, EPRI, Palo Alto, California, USA, (1991).
- 30 E. Berger, H. Fierz y D. Kluge, "Predictive response computations for vibration tests and earthquake of May 20, 1986 using an axisymmetric finite element formulation based on the complex response method and comparison with measurements-A Swiss contribution", *Proceedings EPRI/NRC/TPC Workshop on Seismic soil Structure Interaction Analysis Techniques Using Data from Lotung, Taiwan. EPRI NP-6154*, Vol. **5**, pp. 15.1–15.47, (1989).
- 31 H.M. Hilbert, T.J.R. Hughes y R.L. Taylor, "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, Vol. **5**, pp. 283–292, (1977).